



---

# *Matemática Financeira*

*Notas de Aula :  
Prof. Ivando Faria*

# *O Sistema Econômico*

- *É o conjunto de atividades de produtores, distribuidores, comerciantes e consumidores, voltado para a tarefa básica de tentar satisfazer as necessidades e os desejos humanos pelos bens que este sistema propicia.*
- *Recursos limitados versus necessidades e desejos ilimitados.*

# *Fatores de Produção*

---

- *Recursos para a produção de bens.*
  - *Recursos Naturais ( terra) - Renda*
  - *Trabalho - Salário*
  - *Tecnologia - Royalty*
  - *Capacidade Empresarial - Lucro*
  - *Capital - Juro*
- *Geram renda e produto.*

# *Ativos Reais X Ativos Financeiros*

---

- *Ativos Reais : Propiciam serviços físicos.*
- *Ativos Financeiros : São adquiridos para reserva de valor e pelo retorno que propiciam*
- *Os ativos financeiros existem em uma economia porque a poupança de várias unidades econômicas durante determinado período é superior ao investimento em ativos reais.*

# *Unidades Econômicas*

---

- *Superavitárias*
- *Deficitárias*
- *Ativos Reais*
- *Ativos Financeiros*

# *Poupança e Investimento*

- *Superavitários e Deficitários*
- *Toda unidade econômica deve ser auto-suficiente, ou seja, suas receitas devem suportar as despesas e investimentos em ativos reais.*
- *Quando o investimento em ativos reais excede a poupança de uma unidade econômica há a criação de um ativo financeiro a ser emitido.*

# *Poupança e Investimento*

---

- *Quando o investimento em ativos reais é inferior a poupança de uma unidade econômica há uma necessidade de compra de um ativo financeiro.*

# *Bens de Capital*

---

## *Bens de capital - Máquinas e Equipamentos*

- Aliviam o trabalho e aumentam a produtividade*
- Aumentam o lucro*
- No tempo, o capital gerou capital ...*
- Houve geração de renda pelo uso do capital*

# *O valor do dinheiro no tempo*

---

- *Fatores determinantes :*
  - *Prêmio de espera*
  - *Prêmio de risco*
    - *Risco de Inflação*
    - *Risco de liquidez*
    - *Risco de inadimplência*
    - *Risco de vencimento*
  - *Preferência pela liquidez*

# *O Sistema Financeiro*

- *O papel dos intermediários financeiros*
  - *Reduzir custos de transação ( fundos de investimento)*
  - *Eliminar o custo de procura ( search cost )*
  - *Eficiência na alocação dos recursos.*
    - *Facilitar o contato entre muitos doadores e um único tomador.*
    - *Amenizar desequilíbrios procurando a satisfação máxima de ambas as partes.*
  - *Reduzir riscos pela diversificação*
  - *Gerar grande diversidade de prazos de maturação*
- *Desintermediação e Securitização*

# *Escalonamento das Taxas de Retorno*

---

- *Taxa Básica*
- *Taxa de Captação Bancária*
- *Taxa de Cessão Bancária*
- *Taxa Mínima de Atratividade*
- *Taxa Interna de Retorno*

# *Matemática Financeira*

---

- *Estudo da taxa de retorno e do retorno de investimentos em ativos reais e financeiros.*
- *Regimes de capitalização :*
  - *Juro Simples*
  - *Juro Composto*

# Exercícios

- 1 - Calcular com 6 casas decimais o inverso de 435.
- 2 - Calcular com quatro casas decimais : $2,64^6$
- 3 - Calcular com duas casas decimais :  $251^{1/6}$
- 4 - Calcular com cinco casas decimais:  $1,2579^{77/250}$
- 5 - Calcular a raiz quadrada de 225
- 6 - Calcular 12,5 % de 2500.
- 7 - Uma aplicação realizada em 01/02/2000 teve seu resgate em 25/05/2000. Qual o seu prazo ?
- 8 - Qual o dia da semana e data de resgate de um CDB de 32 dias emitido em 02/03/2000.
- 9 - Uma aplicação com prazo de 112 dias foi resgatada em 01/06/2000. Qual o dia, mês e ano e dia de semana da aplicação.

# *Taxa Nominal X Taxa Efetiva*

A incidência de juros nos investimentos pode ter uma periodicidade regular. A esta periodicidade chama-se de **período de capitalização**, podendo ser, mensal, trimestral, semestral e etc...

Quando o período-base da taxa de juros é coincidente com o período de capitalização do investimento temos uma **taxa efetiva**. É efetiva pois transforma o principal num montante efetivo, verdadeiro.

Caso haja divergência entre o período base da taxa de juros e o período de capitalização então estamos perante uma **taxa aparente**. As taxas nominais servem somente para apresentação verbal do investimento, não servem para cálculos, devem ser convertidas em taxa efetiva antes de inseridas em fórmulas.

# *Exercícios*

- *Calcule as taxas efetivas :*
  - *30% ao ano com capitalização mensal*
  - *15% ao semestre com capitalização bimestral*
  - *24% ao ano com capitalização trimestral*
  - *18,5% ao ano com capitalização semestral*
- *Transforme as taxas efetivas em aparentes ao ano:*
  - *2 % ao mês*
  - *6% ao trimestre*
  - *12% ao semestre*
  - *8% ao bimestre*

# *Taxa Real X Taxa Nominal*

- *Taxa de juros real é aquela que representa o ganho real, acima da inflação. A taxa de juro real apresenta o aumento do seu poder aquisitivo.*
- *A taxa de juros nominal embute a inflação, não traduz a realidade do aumento do seu poder aquisitivo.*

# Exercícios

- *Calcule a taxa real bruta dos investimentos, cujas taxas nominais para determinado período, em que a inflação situou-se em 1,4%, foram de :*
  - 3,0% a.p.
  - 2,5% a.p.
  - 2,0% a.p.
  - 1,0% a.p.
- *Qual a taxa real líquida considerando-se um imposto (t) de 20% ?*

$$\left\{ \left( \frac{1 + [(1 - t)i_{bruta}]}{1 + i_{inflação}} \right) - 1 \right\} * 100 =$$

# *Juros Simples*

- *Se a taxa de juros (  $i$  ) for constante e incidir apenas sobre o capital aplicado (  $P = \text{Principal}$  ), então o juro (  $J$  ) por período será também constante e igual a  $iP$ . Nesse caso observa-se um crescimento linear do capital.*
- *Base de incidência dos juros e constante.*

# *Juros Simples*

$$J = P.i.n$$

$$P = F / (1+in)$$

$$F = P ( 1+in)$$

$$n = (F/P - 1) / i$$

$$i = (F/P - 1) / n$$

# *Taxas Proporcionais*

- *Duas taxas são proporcionais quando o montante produzido por ambas, num mesmo período, é o mesmo, sendo o tamanho das taxas proporcionais ao período de capitalização.*

$$1 \times ia = 2 \times is = 4 \times it = 12 \times im = 360 \times id$$

# *Exercícios*

- *Completar o quadro abaixo com as taxas proporcionais :*

Anual	Semestral	Trimestral	Mensal
48%			
	23%		
		11%	
			3%

# Exercícios

- 1 - Qual o montante (  $P+J=F$  ) produzido por um investimento capitalizado pelo regime de juros simples para os prazos e taxas abaixo :
  - $n=2$  meses  $i=8,5\%$  a.m.
  - $n=1$  ano  $i=5,0\%$  a.t.
  - $n=3$  anos e 3 meses  $i=2,2\%$  a.s.
  
- 2- Qual o valor presente do investimento que produziu o montante de 12 000,00 nos seguintes prazos e taxas :
  - $n=2$  meses  $i=4\%$  a.b.com c. mensal
  - $n=2$  anos  $i=10\%$  a.s. com c. semestral

# Exercícios - JS

- 1- Seja um capital de R\$ 180 000,00 aplicado a juros simples por 4 meses à taxa de 5% ao mês. Quanto será a remuneração (juros) e qual o montante no final do 4º mês ?
- 2 - Calcule quanto deverei aplicar hoje para obter no final de 12 meses um montante de R\$ 500 000,00 a uma taxa de 8% a.m. no regime de juros simples ?
- 3 - Durante quanto tempo terei que aplicar meu capital de R\$ 45 000,00 para obter R\$ 62 000,00 sabendo que  $i = 3\%$  a.t. ?
- 4 - A que taxa deverei aplicar meu capital de R\$ 6 500,00 por três anos para obter R\$ 18 000,00 como montante ?
- 5 - Vamos supor que você disponha de 100 000 e pode optar em aplicar esse capital a juros simples ou a juros compostos à taxa efetiva de 20% a.m.. Qual a opção mais vantajosa para cada um dos prazos de 20, 30 e 60 dias ?

# *Juros Compostos*

- *A base sobre a qual incide os juros neste regime é variável. O regime de juros simples tem base única, o principal. No regime de juro composto a base é sempre o montante do período anterior.*

$$J_n = i.F_{(n-1)}$$

# *Juros Compostos*

## ■ *Fórmulas gerais*

$$F_n = P(1 + i)^n$$

$$i = \left[ \left( \frac{F}{P} \right)^{1/n} \right] - 1$$

$$P = \frac{F}{(1 + i)^n}$$

$$n = \frac{\log F / P}{\log(1 + i)}$$

# *Taxas Equivalentes*

- *Duas taxas efetivas são ditas equivalentes quando num mesmo período, produzem um mesmo montante, respeitando-se os períodos distintos de capitalização. A fórmula de equivalência de taxas é :*

$$(1 + i_a) = (1 + i_s)^2 = (1 + i_t)^4 = (1 + i_b)^6 = (1 + i_m)^{12} = (1 + i_d)^{360}$$

# *Exercícios - TE*

1 - Qual a maior taxa dentre as abaixo ?

72 % a.a; 31,1487705 % a.s. ; 14,5202037% a.t. ;  
4,6230486 % a.m. e 0,15075920% a.d.

2 - Calcular a taxa efetiva anual equivalente a uma taxa nominal de 22% ao ano, para cada um dos períodos de capitalização abaixo citados: semestral, quadrimestral, trimestral, bimestral e diária.

# *Exercícios - JC*

- 1 - Que valor deve ser aplicado hoje para se poder sacar R\$ 12 000,00 daqui a 6 meses ? Considere uma taxa de juros de 24% ao ano com capitalização mensal no regime de juros compostos.*
- 2 - Apliquei R\$ 100 000,00 por cinco meses à taxa de 42,48% ao ano com capitalização mensal no regime de juros compostos quanto receberei de juro e qual será o montante ?*
- 3 - Apliquei R\$ 300 000,00 em investimento que me proporcionou um resgate de R\$ 984 602,87 após 2 anos e três meses. Qual a taxa de juros com base mensal desta minha aplicação ?*
- 4 - Por quanto tempo tenho que investir para transformar R\$ 100 000,00 em R\$ 126 531,90 a uma taxa efetiva de 4% a.m.?*

# *Desconto Simples*

- *Desconto é o abatimento que se obtém ao saldar-se um compromisso antes de sua data de vencimento. É a diferença entre o valor nominal (N) e o valor atual (V= valor descontado) na data do desconto > ( desconto racional).*
- *Desconto racional é o juro simples devido ao valor atual, descontado ou líquido .” O racional é consumir o líquido de dentro da garrafa”.*
- *Desconto Simples Racional ( i ).*

$$P = F / 1+in$$

$$D = Fin / 1+in$$

$$D = Pin$$

$$D = F-P$$

# *Desconto Simples*

- *Desconto Simples Comercial ( por fora)*

$$D = F dn$$

$$P = F ( 1-dn)$$

- *Desconto Comercial é o juro simples devido ao valor nominal."O Nominal é divulgar o Nome(inal) de fora da garrafa".*

- $i = d / 1-dn$

- $d = 1 / 1+in$

# *Exercícios - DS*

- 1 - Qual o desconto ( racional e comercial) que se obtém ao descontar-se, 3 meses antes de seu vencimento, uma nota promissória com valor de face de R\$ 1000,00, cujo termo é de 10 meses a juros simples de 2,5% a.m., se a taxa corrente de juros simples for de 3% a.m.?**
- 2 - Um título com valor de resgate de 1 000,00, com 80 dias a decorrer até o seu vencimento, está sendo negociado a juros simples, com uma taxa de desconto por fora de 15% ao ano. Determine : o valor do principal, o valor do desconto simples e a taxa de rentabilidade do título até o vencimento.**

# *Desconto Composto*

■ *Por dentro ou racional :*

- $D = F[(1+i)^n - 1] / (1+i)^n$

■ *Por fora ou comercial :*

■  $D = F [ 1 - (1-d)^n ]$

# *Exercícios - DC*

- *1 - Um título com valor de 10 000,00, com 60 dias para seu vencimento, e descontado no regime de juros compostos, com uma taxa de desconto “por fora” igual a 1,2 % am. Determinar o valor presente do título e o valor do desconto composto.*
- *2 - Determinar o valor do investimento inicial que deve ser realizado no regime de juros compostos, com uma taxa efetiva de 1,25% ao mês, para produzir um valor acumulado de 500 000 no final de 2 anos.*

# *Série Uniforme*

- *A Série Uniforme de Pagamentos é uma sequência de  $n$  pagamentos iguais e consecutivos de valor  $A$  (PMT na HP). As Séries Uniformes podem ser Antecipadas (BEG) ou Postecipadas (END).*

$$P = A \frac{(1+i)^n - 1}{i} * \frac{1}{(1+i)^n}$$

$$F_n = A \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

# *Exercícios-SU*

- 1- Uma pessoa pretende depositar mensalmente \$100 por um período de 50 meses consecutivos em sua caderneta de poupança. Se o primeiro depósito for feito daqui a um mês e o banco remunerar a poupança a uma taxa de 1% ao mês, quanto esta pessoa terá após o último depósito? Resolver pela fórmula e pela HP.*
- 2 - Quanto deve ser depositado hoje para que se possa fazer seis retiradas mensais de \$200, se a taxa de juros considerada for de 5% ao mês ?*
- 3 - Se compro um objeto, cujo preço à vista é de \$5000,00, em 12 prestações mensais iguais, sem entrada, a uma taxa de 3,5% a.m., qual o valor das prestações ? Resolver pela fórmula e pela HP.*

# Série Gradiente

- As series em gradiente caracterizam-se por apresentarem um valor de crescimento constante ( $G$ ). Exemplo :
- $[0 (-P), 1(100), 2(150), 3(200), 4(250), 5(300), 6(350), 7(400)]$
- $P = 100 (P/A);5\%;7) + 50 (P/G);5\%;7) = 1390,24$

$$P = G \left\{ \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{i^2} - \frac{n}{i} \right] * \frac{1}{(1+i)^n} \right\}$$

$$A = G \left\{ \frac{1}{i} - \frac{n}{i} * \frac{i}{(1+i)^n - 1} \right\}$$

# *Valor Atual de um Fluxo de Caixa*

- *Fórmula Geral*

$$P = \sum_{j=1}^n \frac{C_j}{(1+i)^j}$$

# Exercícios - VA

- 1 - Quanto deve ser depositado hoje para que sejam feitas retiradas mensais consecutivas de \$200, \$250, \$220, \$180, \$120 e \$300 se a taxa de remuneração do capital for de 2% ao mês ?
- 2 - Qual o valor presente do fluxo de caixa anual, a uma taxa de juros de 10% ao ano ?  
[0 (-P), 4(1200), 5(1200), 6(1200), 7(1500), 8(1500), 9(1500)]
- 3 - Uma loja vende um conjunto de som por \$80 de entrada e mais três parcelas mensais de \$40. O preço à vista deste conjunto de som é de \$ 180. Qual a taxa de juros que a loja está embutindo no preço a prazo.

# *Sistemas de Amortização*

- *O Sistema Francês ou Tabela Price. Prestações constantes.*
- *O Sistema de Amortização Constante (SAC)*
- *O estudo dos Sistemas de Amortização busca identificar, em qualquer tempo, o estado da dívida, isto é, a decomposição do valor de uma prestação em parcelas referentes ao juros e amortização e a apuração do saldo devedor.*

# *Tabela Price*

- *Prestação = Juros + Amortização*
- *Primeiras prestações altamente compostas por juros*
- *A amortização apresenta crescimento geométrico*
- *É uma Série Uniforme de Pagamentos.*

# *Exercícios - SA*

- *Elaborar a planilha de pagamentos de um financiamento de \$ 120 000, pactuado a uma taxa de juros de 36% ao ano com capitalização mensal e a ser pago em 8 prestações :*
  - *Pela Tabela Price*
  - *Pelo SAC*

# *Equivalência de Fluxos de Caixa*

---

- *Dois fluxos de caixa são ditos equivalentes, quando descontados, a uma mesma taxa de juros, produzem o mesmo valor presente.*
- *Pelo método do Valor Presente Líquido verificamos a equivalência de fluxos de caixa.*

# *Análise de Investimentos*

- *Método do Valor Presente Líquido*

$$VPL = \sum_{j=0}^n \frac{FC_j}{(1+i)^j}$$

# *Análise de Investimentos*

- *Método da Taxa Interna de Retorno*

$$VPL = \sum_{j=0}^n \frac{FC_j}{(1 + TIR)^j} = ZERO$$

# *Exercícios - AI*

- *Compare os projetos abaixo pelos métodos VPL e TIR.*
  - *Projeto B*  
*[0 (-50000), 1(20000), 2(10000), 3(10000), 4(15000), 5(15000)]*
  - *Projeto C*  
*[0 (-20000), 1(8000), 2(6000), 3(6000), 4(4000), 5(4000)]*
- *Compare a evolução dos VPLs para taxas entre 0% e a que torna os VPLs negativos.*
- *Que conclusões tirar ?*