



Matemática Financeira

*Notas de Aula :
Prof. Ivando Faria*

O Sistema Econômico

- *É o conjunto de atividades de produtores, distribuidores, comerciantes e consumidores, voltado para a tarefa básica de tentar satisfazer as necessidades e os desejos humanos pelos bens que este sistema propicia.*
- *Recursos limitados versus necessidades e desejos ilimitados.*

Fatores de Produção

- *Recursos para a produção de bens.*
 - *Recursos Naturais (terra) - Aluguel*
 - *Trabalho - Salário*
 - *Tecnologia - Royalty*
 - *Capacidade Empresarial - Lucro*
 - *Capital - Juro*
- *Geram renda.*

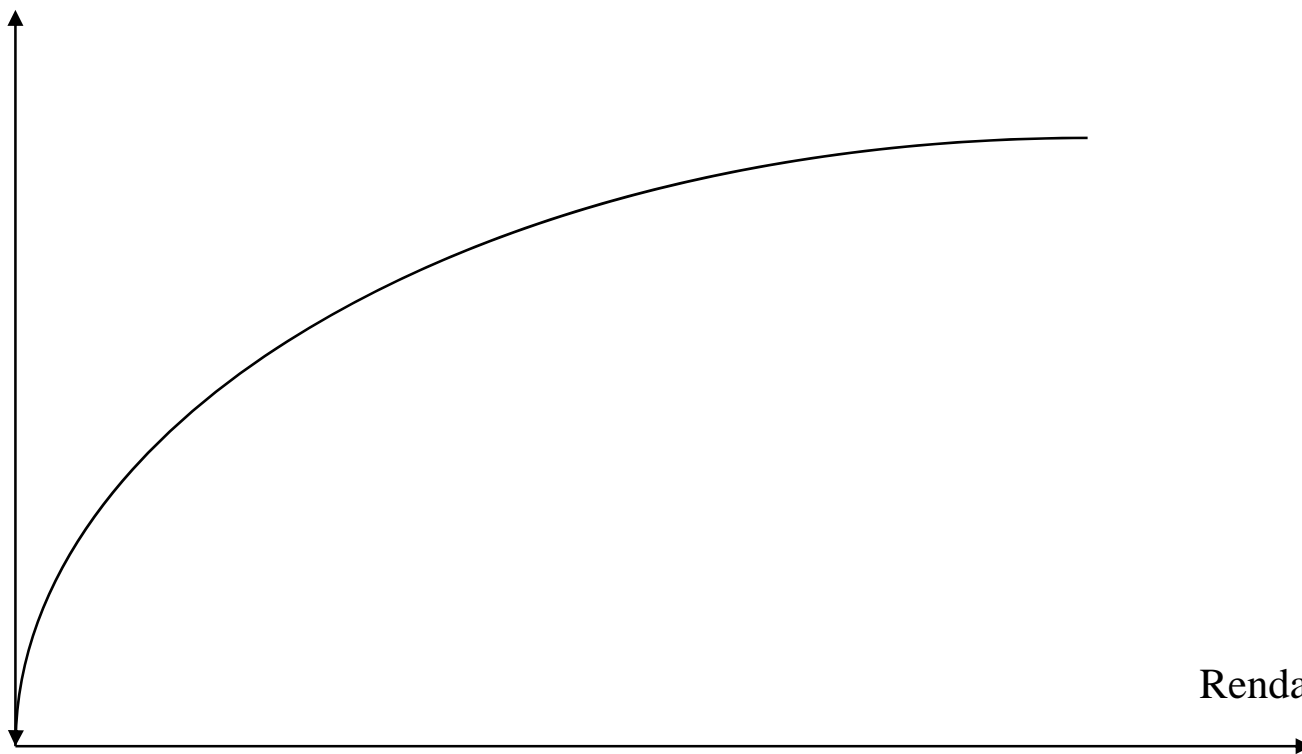
Bens de Capital

Bens de capital - Máquinas e Equipamentos

- Aliviam o trabalho e aumentam a produtividade*
- Aumentam o lucro*
- No tempo, o capital gerou capital ...*
- Houve geração de renda.*

Nível de renda X Consumo

■ Consumo



Renda, Consumo e Poupança

- *Quanto maior a renda maior o consumo*
- *Uma parcela da renda é destinada ao consumo*
- *Outra parcela da renda é destinada a poupança: Porque poupar ?*

Determinantes do Consumo

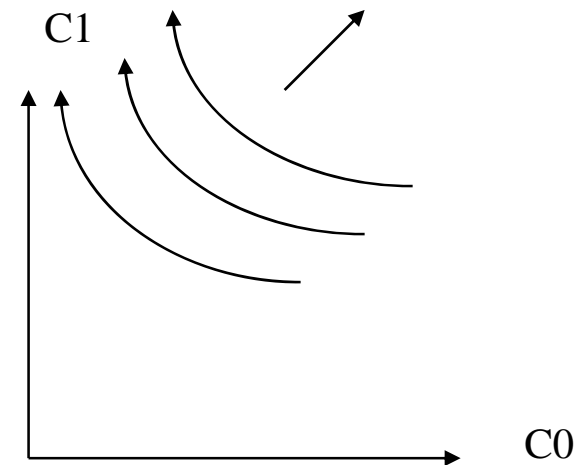
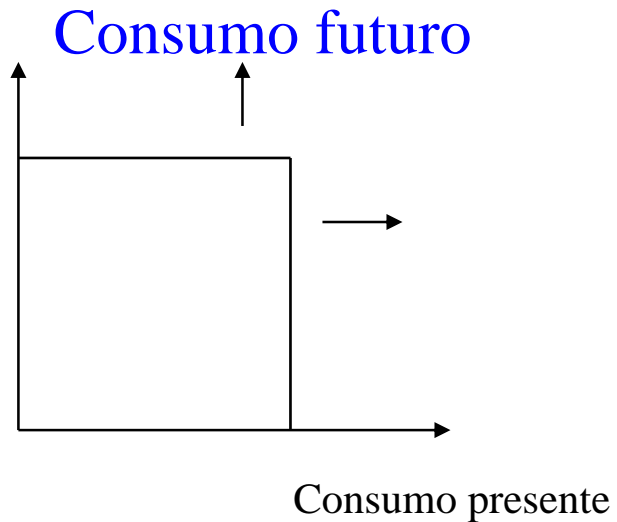
- *Tenho nível de renda ou riqueza. Quanto maior a renda maior o consumo.*
- *Efeito demonstração. Parâmetro nos gastos de indivíduos da mesma classe social.*
- *Estratégia de sustentação de nível mínimo de consumo durante toda a vida.*
- *Unidades familiares tendem a consumir certa proporção de sua renda permanente. Se ocorre aumento pontual da renda, há também aumento pontual do consumo.*

Curvas de Indiferença do Investidor

- *A renda das pessoas se divide entre consumo e investimento.*
- *Qual o nível de consumo presente e de consumo futuro preferido pelo investidor ?*
- *Que fatores levam o indivíduo a poupar para realizar investimentos ?*

Curvas de indiferença

■ Curvas de iso - satisfação



O valor do dinheiro no tempo

- *Vender um carro por R\$10 000,00 hoje é o mesmo que vender este carro, a R\$10 000,00, daqui a um ano ?*
 - *O Capital aumenta a produtividade ?*
 - *Como estabelecer a relação entre os ganhos propiciados pelo capital e o custo deste capital ?*

O valor do dinheiro no tempo

- *As oportunidades de investimento que o capital propicia, faz com que o capital tenha um custo, associado a estas oportunidades, este é o :
 - *Custo de Oportunidade**
- *Cada oportunidade de investimento tem um custo proporcional ao risco.*

Curva de Oportunidades de Investimento

- *Dado um certo grau de riqueza (W) e algumas oportunidades de investimento, pode -se montar a curva de oportunidades de investimento.*
- *Esta curva determinará diversas alternativas de consumo (presente e futuro), e de investimentos.*

Ponto Ótimo do Investimento

- *O ponto onde a curva de indiferença do investidor tangencia a curva de oportunidade de investimento.*
- *Há maximização da satisfação, da utilidade do retorno ?*

Investidores Racionais

- *Avessos ao Risco*
- *Insaciáveis - Quanto maior a riqueza maior a utilidade e a satisfação*
- *Função Utilidade decrescente com o aumento da riqueza. O investidor atribui menos utilidade a acréscimos de importâncias iguais de riqueza. Conforme a riqueza aumenta, investe menos recursos em ativos com risco.*

Função Utilidade

- *Frente a alternativas de investimento com determinadas condições de retorno e de risco, nem todos os investidores agirão da mesma forma.*
- *O investidor age objetivando maximizar a utilidade esperada atribuída a importância resultante do investimento (ganho), e não objetivando maximizar este ganho (valor esperado).*
- *O objetivo da análise de investimento é descobrir aquele(s) ativo(s), cuja combinação da taxa de retorno esperada e risco maximize a utilidade do investidor (satisfação).*

Ativos Reais X Ativos Financeiros

- *Ativos Reais : Propiciam serviços físicos.*
- *Ativos Financeiros : São adquiridos para reserva de valor e pelo retorno que propiciam*
- *Os ativos financeiros existem em uma economia porque a poupança de várias unidades econômicas durante determinado período é superior ao investimento em ativos reais.*

Poupança e Investimento

- *Superavitários e Deficitários*
- *Toda unidade econômica deve ser auto-suficiente, ou seja, suas receitas devem suportar as despesas e investimentos em ativos reais.*
- *Quando o investimento em ativos reais excede a poupança de uma unidade econômica há a criação de um ativo financeiro a ser emitido.*

Poupança e Investimento

- *Quando o investimento em ativos reais é inferior a poupança de uma unidade econômica há uma necessidade de compra de um ativo financeiro.*

O Sistema Financeiro

- *O papel dos intermediários financeiros*
 - *Reduzir custos de transação (fundos de investimento)*
 - *Eliminar o custo de procura (search cost)*
 - *Eficiência na alocação dos recursos.*
 - *Facilitar o contato entre muitos doadores e um único tomador.*
 - *Amenizar desequilíbrios procurando a satisfação máxima de ambas as partes.*
 - *Reduzir riscos pela diversificação*
 - *Gerar grande diversidade de prazos de maturação*
- *Desintermediação e Securitização*

Matemática Financeira

- *Objetiva estudar o relacionamento entre valores monetários posicionados em pontos distintos no tempo.*
- *Ferramenta : HP 12C*
- *Regimes de :*
 - *Juro Simples*
 - *Juro Composto*

HP 12 C - Funções Básicas

■ *Limpeza*

- *Visor - CLx*
- *Registradores - f REG*
- *Registradores Financeiros - f FIN*

■ *Ponto e Vírgula*

- *manter pressionada a tecla . (ponto)*
- *ligar a calculadora e soltar a tecla . (ponto)*

HP 12 C - Funções Básicas

■ Potenciação

- calcular 4^3
- 4 ENTER 3 y^x

■ Raiz Quadrada

- calcular $\sqrt{49}$
- 49 g \sqrt{x}

■ Porcentagem

- calcular 8 % de 8 000
- 8000 ENTER 8 %

Funções de Calendário

■ *Número de dias entre datas*

- escolher a notação M.DY ou D.MY
- pressionar *f* *REG*
- digitar a data mais antiga *ENTER*
- digitar a data mais recente
- digitar *g* Δ *DYS*

■ *Datas Futuras ou Passadas*

- escolher a notação
- pressionar *f* *REG*
- digitar a data *ENTER*
- digitar o número de dias
- pressionar *g* *DATE*

Exercícios

- 1 - Calcular com 6 casas decimais o inverso de 435.
- 2 - Calcular com quatro casas decimais : $2,64^6$
- 3 - Calcular com duas casas decimais : $251^{1/6}$
- 4 - Calcular com cinco casas decimais: $1,2579^{77/250}$
- 5 - Calcular a raiz quadrada de 225
- 6 - Calcular 12,5 % de 2500.
- 7 - Uma aplicação realizada em 01/02/2000 teve seu resgate em 25/05/2000. Qual o seu prazo ?
- 8 - Qual o dia da semana e data de resgate de um CDB de 32 dias emitido em 02/03/2000.
- 9 - Uma aplicação com prazo de 112 dias foi resgatada em 01/06/2000. Qual o dia, mês e ano e dia de semana da aplicação.

Taxa unitária X Taxa Centesimal

- *1 % - 0,01*
- *120 % - 1,2*
- *1240 % - 12,4*
- *0,08 - 8 %*
- *13,56 - 1356 %*
- *22,2456 - 2224,56 %*

Taxa Nominal X Taxa Efetiva

A incidência de juros nos investimentos pode ter uma periodicidade regular. A esta periodicidade chama-se de **período de capitalização**, podendo ser, mensal, trimestral, semestral e etc...

Quando o período-base da taxa de juros é coincidente com o período de capitalização do investimento temos uma **taxa efetiva**. É efetiva pois transforma o principal num montante efetivo, verdadeiro.

Caso haja divergência entre o período base da taxa de juros e o período de capitalização então estamos perante uma **taxa aparente**. As taxas nominais servem somente para apresentação verbal do investimento, não servem para cálculos, devem ser convertidas em taxa efetiva antes de inseridas em fórmulas.

Exercícios

- *Calcule as taxas efetivas :*
 - *30% ao ano com capitalização mensal*
 - *15% ao semestre com capitalização bimestral*
 - *24% ao ano com capitalização trimestral*
 - *18,5% ao ano com capitalização semestral*
- *Transforme as taxas efetivas em aparentes ao ano:*
 - *2 % ao mês*
 - *6% ao trimestre*
 - *12% ao semestre*
 - *8% ao bimestre*

Taxa Real X Taxa Nominal

- *Taxa de juros real é aquela que representa o ganho real, acima da inflação. A taxa de juro real apresenta o aumento do seu poder aquisitivo.*
- *A taxa de juros nominal embute a inflação, não traduz a realidade do aumento do seu poder aquisitivo.*

Exercícios

- *Calcule a taxa real bruta dos investimentos, cujas taxas nominais para determinado período, em que a inflação situou-se em 1,4%, foram de :*
 - 3,0% a.p.
 - 2,5% a.p.
 - 2,0% a.p.
 - 1,0% a.p.
- *Qual a taxa real líquida considerando-se um imposto (t) de 20% ?*

$$\left\{ \left(\frac{1 + [(1 - t)i_{bruta}]}{1 + i_{inflação}} \right) - 1 \right\} * 100 =$$

Juros Simples

- *Se a taxa de juros (i) for constante e incidir apenas sobre o capital aplicado ($P = \text{Principal}$), então o juro (J) por período será também constante e igual a iP . Nesse caso observa-se um crescimento linear do capital.*
- *Base de incidência dos juros e constante.*

Juros Simples

$$J = P.i.n$$

$$P = F / (1+in)$$

$$F = P (1+in)$$

$$n = (F/P - 1) / i$$

$$i = (F/P - 1) / n$$

Taxas Proporcionais

- *Duas taxas são proporcionais quando o montante produzido por ambas, num mesmo período, é o mesmo, sendo o tamanho das taxas proporcionais ao período de capitalização.*

$$1 \times ia = 2 \times is = 4 \times it = 12 \times im = 360 \times id$$

Exercícios

- *Completar o quadro abaixo com as taxas proporcionais :*

Anual	Semestral	Trimestral	Mensal
48%			
	23%		
		11%	
			3%

Exercícios

- 1 - Qual o montante ($P+J=F$) produzido por um investimento capitalizado pelo regime de juros simples para os prazos e taxas abaixo :
 - $n=2$ meses $i=8,5\% \text{ a.m.}$
 - $n=1$ ano $i=5,0\% \text{ a.t.}$
 - $n=3$ anos e 3 meses $i=2,2\% \text{ a.s.}$

- 2- Qual o valor presente do investimento que produziu o montante de 12 000,00 nos seguintes prazos e taxas :
 - $n=2$ meses $i=4\% \text{ a.b.com c. mensal}$
 - $n=2$ anos $i=10\% \text{ a.s. com c. semestral}$

Exercícios - JS

- 1 - Seja um capital de R\$ 180 000,00 aplicado a juros simples por 4 meses à taxa de 5% ao mês. Quanto será a remuneração (juros) e qual o montante no final do 4º mês ?*
- 2 - Calcule quanto deverei aplicar hoje para obter no final de 12 meses um montante de R\$ 500 000,00 a uma taxa de 8% a.m. no regime de juros simples ?*
- 3 - Durante quanto tempo terei que aplicar meu capital de R\$ 45 000,00 para obter R\$ 62 000,00 sabendo que $i = 3\%$ a.t. ?*
- 4 - A que taxa deverei aplicar meu capital de R\$ 6 500,00 por três anos para obter R\$ 18 000,00 como montante ?*
- 5 - Vamos supor que você disponha de 100 000 e pode optar em aplicar esse capital a juros simples ou a juros compostos à taxa efetiva de 20% a.m.. Qual a opção mais vantajosa para cada um dos prazos de 20, 30 e 60 dias ?*

Juros Compostos

- *A base sobre a qual incide os juros neste regime é variável. O regime de juros simples tem base única, o principal. No regime de juro composto a base é sempre o montante do período anterior.*

$$J_n = i.F_{(n-1)}$$

Juros Compostos

■ *Fórmulas gerais*

$$F_n = P(1 + i)^n$$

$$i = \left[\left(\frac{F}{P} \right)^{1/n} \right] - 1$$

$$P = \frac{F}{(1 + i)^n}$$

$$n = \frac{\log F / P}{\log(1 + i)}$$

Taxas Equivalentes

- *Duas taxas efetivas são ditas equivalentes quando num mesmo período, produzem um mesmo montante, respeitando-se os períodos distintos de capitalização. A fórmula de equivalência de taxas é :*

$$(1 + i_a) = (1 + i_s)^2 = (1 + i_t)^4 = (1 + i_b)^6 = (1 + i_m)^{12} = (1 + i_d)^{360}$$

Exercícios - TE

1 - Qual a maior taxa dentre as abaixo ?

72 % a.a; 31,1487705 % a.s. ; 14,5202037% a.t. ;
4,6230486 % a.m. e 0,15075920% a.d.

2 - Calcular a taxa efetiva anual equivalente a uma taxa nominal de 22% ao ano, para cada um dos períodos de capitalização abaixo citados: semestral, quadrimestral, trimestral, bimestral e diária.

Exercícios - JC

- 1 - Que valor deve ser aplicado hoje para se poder sacar R\$ 12 000,00 daqui a 6 meses ? Considere uma taxa de juros de 24% ao ano com capitalização mensal no regime de juros compostos.*
- 2 - Apliquei R\$ 100 000,00 por cinco meses à taxa de 42,48% ao ano com capitalização mensal no regime de juros compostos quanto receberei de juro e qual será o montante ?*
- 3 - Apliquei R\$ 300 000,00 em investimento que me proporcionou um resgate de R\$ 984 602,87 após 2 anos e três meses. Qual a taxa de juros com base mensal desta minha aplicação ?*
- 4 - Por quanto tempo tenho que investir para transformar R\$ 100 000,00 em R\$ 126 531,90 a uma taxa efetiva de 4% a.m.?*

Desconto Simples

- *Desconto é o abatimento que se obtém ao saldar-se um compromisso antes de sua data de vencimento. É a diferença entre o valor nominal (N) e o valor atual (V= valor descontado) na data do desconto > (desconto racional).*
- *Desconto racional é o juro simples devido ao valor atual, descontado ou líquido .” O racional é consumir o líquido de dentro da garrafa”.*
- *Desconto Simples Racional (i).*

$$P = F / 1+in$$

$$D = Fin / 1+in$$

$$D = Pin$$

$$D = F-P$$

Desconto Simples

- *Desconto Simples Comercial (por fora)*

$$D = F dn$$

$$P = F (1-dn)$$

- *Desconto Comercial é o juro simples devido ao valor nominal."O Nominal é divulgar o Nome(inal) de fora da garrafa".*

- $i = d / 1-dn$

- $d = 1 / 1+in$

Exercícios - DS

- 1 - Qual o desconto (racional e comercial) que se obtém ao descontar-se, 3 meses antes de seu vencimento, uma nota promissória com valor de face de R\$ 1000,00, cujo termo é de 10 meses a juros simples de 2,5% a.m., se a taxa corrente de juros simples for de 3% a.m.?**
- 2 - Um título com valor de resgate de 1 000,00, com 80 dias a decorrer até o seu vencimento, está sendo negociado a juros simples, com uma taxa de desconto por fora de 15% ao ano. Determine : o valor do principal, o valor do desconto simples e a taxa de rentabilidade do título até o vencimento.**

Desconto Composto

■ *Por dentro ou racional :*

- $D = F[(1+i)^n - 1] / (1+i)^n$

■ *Por fora ou comercial :*

■ $D = F [1 - (1-d)^n]$

Exercícios - DC

- *1 - Um título com valor de 10 000,00, com 60 dias para seu vencimento, e descontado no regime de juros compostos, com uma taxa de desconto “por fora” igual a 1,2 % am. Determinar o valor presente do título e o valor do desconto composto.*
- *2 - Determinar o valor do investimento inicial que deve ser realizado no regime de juros compostos, com uma taxa efetiva de 1,25% ao mês, para produzir um valor acumulado de 500 000 no final de 2 anos.*

Série Uniforme

- *A Série Uniforme de Pagamentos é uma sequência de n pagamentos iguais e consecutivos de valor A (PMT na HP). As Séries Uniformes podem ser Antecipadas (BEG) ou Postecipadas (END).*

$$P = A \frac{(1+i)^n - 1}{i} * \frac{1}{(1+i)^n}$$

$$F_n = A \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Exercícios-SU

- 1- Uma pessoa pretende depositar mensalmente \$100 por um período de 50 meses consecutivos em sua caderneta de poupança. Se o primeiro depósito for feito daqui a um mês e o banco remunerar a poupança a uma taxa de 1% ao mês, quanto esta pessoa terá após o último depósito? Resolver pela fórmula e pela HP.*
- 2 - Quanto deve ser depositado hoje para que se possa fazer seis retiradas mensais de \$200, se a taxa de juros considerada for de 5% ao mês ?*
- 3 - Se compro um objeto, cujo preço à vista é de \$5000,00, em 12 prestações mensais iguais, sem entrada, a uma taxa de 3,5% a.m., qual o valor das prestações ? Resolver pela fórmula e pela HP.*

Série Gradiente

- As series em gradiente caracterizam-se por apresentarem um valor de crescimento constante (G). Exemplo :
- $[0 (-P), 1(100), 2(150), 3(200), 4(250), 5(300), 6(350), 7(400)]$
- $P = 100 (P/A);5\%;7) + 50 (P/G);5\%;7) = 1390,24$

$$P = G \left\{ \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i^2} - \frac{n}{i} \right] * \frac{1}{(1+i)^n} \right\}$$

$$A = G \left\{ \frac{1}{i} - \frac{n}{i} * \frac{i}{(1+i)^n - 1} \right\}$$

Valor Atual de um Fluxo de Caixa

- *Fórmula Geral*

$$P = \sum_{j=1}^n \frac{C_j}{(1+i)^j}$$

Exercícios - VA

- 1 - Quanto deve ser depositado hoje para que sejam feitas retiradas mensais consecutivas de \$200, \$250, \$220, \$180, \$120 e \$300 se a taxa de remuneração do capital for de 2% ao mês ?*
- 2 - Qual o valor presente do fluxo de caixa anual, a uma taxa de juros de 10% ao ano ?
[0 (-P), 4(1200), 5(1200), 6(1200), 7(1500), 8(1500), 9(1500)]*
- 3 - Uma loja vende um conjunto de som por \$80 de entrada e mais três parcelas mensais de \$40. O preço à vista deste conjunto de som é de \$ 180. Qual a taxa de juros que a loja está embutindo no preço a prazo.*

Sistemas de Amortização

- *O Sistema Francês ou Tabela Price. Prestações constantes.*
- *O Sistema de Amortização Constante (SAC)*
- *O estudo dos Sistemas de Amortização busca identificar, em qualquer tempo, o estado da dívida, isto é, a decomposição do valor de uma prestação em parcelas referentes ao juros e amortização e a apuração do saldo devedor.*

Tabela Price

- *Prestação = Juros + Amortização*
- *Primeiras prestações altamente compostas por juros*
- *A amortização apresenta crescimento geométrico*
- *É uma Série Uniforme de Pagamentos.*

SAC

■ Fórmulas gerais

Amortização (A) = C_0 / n , onde C_0 é o capital emprestado

Saldo devedor após o pagamento da K-ésima prestação:

$$C_k = C \left(1 - \frac{k}{n} \right)$$

Parcela de juros da K-ésima prestação :

$$j_k = iC \left(1 - \frac{k-1}{n} \right)$$

SAC

- *Valor da K-ésima prestação :*

$$p_k = C \left(\frac{1}{n} + i \right) - \frac{iC}{n} (k - 1)$$

Exercícios - SA

- *Elaborar a planilha de pagamentos de um financiamento de \$ 120 000, pactuado a uma taxa de juros de 36% ao ano com capitalização mensal e a ser pago em 8 prestações :*
 - *Pela Tabela Price*
 - *Pelo SAC*

Equivalência de Fluxos de Caixa

- *Dois fluxos de caixa são ditos equivalentes, quando descontados, a uma mesma taxa de juros, produzem o mesmo valor presente.*
- *Pelo método do Valor Presente Líquido verificamos a equivalência de fluxos de caixa.*

Análise de Investimentos

- *Método do Valor Presente Líquido*

$$VPL = \sum_{j=0}^n \frac{FC_j}{(1+i)^j}$$

Análise de Investimentos

- *Método da Taxa Interna de Retorno*

$$VPL = \sum_{j=0}^n \frac{FC_j}{(1 + TIR)^j} = ZERO$$

Exercícios - AI

- *Compare os projetos abaixo pelos métodos VPL e TIR.*
 - *Projeto B*
[0 (-50000), 1(20000), 2(10000), 3(10000), 4(15000), 5(15000)]
 - *Projeto C*
[0 (-20000), 1(8000), 2(6000), 3(6000), 4(4000), 5(4000)]
- *Compare a evolução dos VPLs para taxas entre 0% e a que torna os VPLs negativos.*
- *Que conclusões tirar ?*

Debênture

- Seja o caso de uma empresa que pretende lançar 100 milhões em debêntures abertas ao público, não conversíveis.
- Prazo : 3 anos
- Amortização : 33,33% ao final de cada ano
- Pagamento de juros : trimestral
- Taxa de juros : 12% ao ano
- Correção monetária : pela variação oficial
- Taxa de aval do banco avalista : 3% sobre o saldo devedor cobrada antecipada e anualmente.
- Taxa de garantia de subscrição : 3% no ato

Debênture

- Taxa de colocação : 3% no ato
- Taxa de coordenação : 2% no ato.
- Prêmio aos debenturistas : 4% sobre o saldo remanescente ao final do primeiro e do segundo ano.
- Não há incidência de IOF.
- Determinar a taxa real de juros antes dos impostos.

Estudo de Casos

- *O CDI e a taxa over.*
- *Analisando uma NTN-C*