

1. PARAMETRIZAÇÕES DO RISCO E DO VALOR

1.1 Introdução

Este capítulo tem por objetivo apreciar a forma como os diversos modelos em finanças interpretam o retorno por unidade de risco dos investimentos. Os modelos que parametrizam esta relação tentam estabelecer o retorno justo para determinado nível de risco.

Como vimos, na introdução deste trabalho, o enquadramento mais abrangente das decisões de investimento considera a função utilidade do investidor, envolvendo, assim, dados – inclusive individuais psicológicos, como o grau de aversão ao risco, na decisão de investimento.

Nesta fase da dissertação pretendemos nos abstrair das questões associadas à satisfação do investidor e analisar puramente, sem nos impor limitações conseqüentes dos níveis de aversão ou de atração pelo risco, o retorno por unidade de risco.

As questões que circundam o risco, como a sua forma de medição, em quanto assumi-lo e como determinar o valor justo da recompensa por assumi-lo, são fundamentais em decisões de investimento. Há alguns modelos que parametrizam a relação do retorno com o risco em diversas circunstâncias e cada um com suas especificidades de tratamento desta relação.

Modelos bons, segundo DAMODARAN (1997), devem conter as seguintes características:

- a) Apresentarem uma medida de risco que possa ser aplicada a qualquer investimento, financeiro ou real. É justo que seja assim, já que a mesma unidade monetária selecionará o melhor ativo para sua alocação. Esta medida deve ser padronizada de modo que possamos comparar investimentos.
- b) Detalhar os riscos que são recompensados e os que não são.
- c) Deve estabelecer o tamanho do retorno para um determinado nível de risco. O modelo deve ser capaz de avaliar o prêmio de risco.

Apreciaremos, neste capítulo, três modelos que tratam a relação retorno-risco. Nosso objetivo é refletir, através da abordagem dos modelos, sobre as relações existentes entre risco, retorno e valor. Os modelos a serem apreciados são o CAPM (*Capital Asset Pricing Model*), APT (*Arbitrage Pricing Theory*) e o OPM (*Option Pricing Model*).

1.2 O modelo de precificação de ativos de capital

O **Capital Asset Pricing Model (CAPM)** é um modelo que pretende avaliar o retorno a ser exigido para investimento em determinado ativo com base na avaliação do risco associado a este ativo. O modelo, desenvolvido no início da década de 60, nos informa que há uma relação positiva entre retorno esperado e risco.

O modelo assim se apresenta:

$$\bar{R} = R_F + \beta (\bar{R}_M - R_F)$$

Onde:

\bar{R}_i = retorno a ser exigido no investimento **i**;

R_F = retorno de investimento em ativo livre de risco;

R_M = retorno de investimento em um ativo de risco padrão, da carteira de mercado;

Coefficiente Beta (β) = covariância padronizada entre o retorno do investimento **i** e o retorno do investimento de risco padrão (M).

$$\beta = \frac{Cov_{iM}}{Var_M} = \frac{\sigma_i \sigma_M \rho_{iM}}{\sigma_M^2}$$

O modelo CAPM decompõe o retorno total a ser exigido em um investimento em qualquer ativo, em uma componente de rendimento fixo e outra componente de rendimento variável função direta do grau de risco deste investimento.

A componente de rendimento fixo é o retorno propiciado por um ativo livre de risco. É o custo de oportunidade, é o custo da renúncia de se investir em um ativo livre de risco. É fácil reconhecermos que este é o retorno mínimo a ser exigido em qualquer investimento, pois esta taxa de rendimento fixo é a menor taxa de mercado, associada a

investimento que propicie risco nulo e de acesso permanente e irrestrito. É a menor taxa de remuneração de um investimento e é natural que, sendo esta a menor taxa de juros da economia (taxa básica), esteja associada a investimento livre de risco. A componente de rendimento variável é determinada pelo tamanho da variância dos retornos do investimento que se pretende realizar. É o retorno adicional exigido pelo maior risco do investimento medido pela maior variância dos seus retornos possíveis em torno do retorno esperado. Esta variância dos retornos possíveis em torno do retorno esperado é que determinará o risco ou o grau de incerteza em torno do retorno a ser obtido no investimento.

O grau de risco do investimento e a quantificação do prêmio de risco são representados, no modelo descrito acima, pela segunda parcela da direita da equação do CAPM. Representa o prêmio a ser cobrado pelo risco que se corre no investimento em causa.

O grau de risco no CAPM é medido de forma relativa, através do cálculo do coeficiente beta, tendo em consideração sempre um mesmo fator de risco, o retorno do mercado, representado pelo retorno do índice de bolsa. O coeficiente beta, ao estabelecer uma relação entre a covariância do investimento e do índice, e a variância do índice, estabelece o grau de intensidade da variação dos retornos do ativo a ser investido e o retorno do mercado.

Uma especificidade do CAPM é determinar o risco de todos os ativos, sempre o relacionando ao mesmo fator de risco – o retorno do mercado.

A componente de rendimento variável da taxa de retorno é função do grau de risco e foi parametrizada num investimento de risco padrão. O coeficiente beta mede o grau de risco, e o mede em termos relativos com a carteira de ações subjacente ao índice de bolsa, representativo da carteira de mercado, o que qualificamos de investimento de risco padrão. Esta é a razão pela qual o CAPM é chamado de modelo de índice único, já que este determina o retorno a ser exigido em qualquer investimento com base na relação entre as variâncias dos retornos deste investimento e dos retornos do investimento padrão – a carteira de mercado.

O risco do investimento, que determinará o prêmio de risco, que quantifica a componente variável do retorno, subdivide-se numa componente de risco específico, que pode ser reduzido através da diversificação dos ativos a integrem o investimento total, e

em outra componente, respeitante ao risco sistemático, não-diversificável e que somente pode ser gerenciado. Portanto, o risco total, o risco sistemático adicionado ao risco específico, pode ser reduzido da parcela referente ao risco específico, que é eliminado pela adição de novos ativos à carteira, ou seja, pela diversificação.

A técnica de gestão do risco específico foi estabelecida na Teoria de Carteiras de Markovitz que, pela diversificação e pela análise da correlação do retorno dos ativos a integrarem a carteira, reduz o risco específico numa função inversa da correlação dos retornos dos ativos, mantendo-se o retorno esperado do investimento. Há, assim, uma otimização do retorno por unidade de risco. Harry Markovitz trata, através de programação quadrática, de estabelecer a combinação de ativos que otimiza a relação retorno-risco da carteira; a chamada carteira ótima.⁴

Restará sempre, a ser gerenciado, o risco sistemático.

O coeficiente beta quantifica o risco do investimento em relação ao risco sistemático contido na carteira de mercado, já que esta possui um grau de diversificação dos seus ativos que nos permite aceitar a inexistência do risco específico ou diversificável.

Do exposto acima, podemos deduzir que o modelo CAPM determina o retorno por unidade de risco, obedecendo uma proporcionalidade com o prêmio de risco atribuído ao investimento de risco padrão, a carteira de mercado, como veremos:

$$R_i = R_f + \beta(R_m - R_f) \therefore \frac{R_i - R_f}{\beta} = \frac{R_m - R_f}{1}$$

Esta relação é chamada de Índice de Treynor e é utilizada para avaliação de performance de administradores de carteiras, estabelecendo o retorno excedente por unidade de risco, medido pelo coeficiente beta.

Nos interessa ressaltar que a gestão do risco sistemático pode reduzir a variância dos retornos esperados, sem alterar o retorno esperado, otimizando a relação retorno-risco. A gestão do risco sistemático, veremos nos próximos capítulos, pode ser feita através da atividade de hedging.

⁴ MARKOVITZ apud ROSS et alii (1995, p.215). Harry Markovitz recebeu o prêmio Nobel em economia, em 1990, por seu trabalho na moderna Teoria de Carteiras. O seu trabalho clássico é *Portfolio Selection*. New York : John Wiley & Sons, 1959.

1.3 Teoria de precificação de ativos pela arbitragem

Para apreciarmos outra forma de quantificarmos o retorno por unidade de risco, podemos analisar outro modelo, o **APT (Arbitrage Pricing Theory)**, do qual o CAPM é um caso particular, já que o APT relaciona o retorno a ser exigido por um investimento com diversos índices, fatores explicativos do retorno ou fatores de risco, enquanto o CAPM o relaciona com o retorno da carteira de mercado.

A APT como o CAPM determinam que os investidores devem ser recompensados pela assunção de riscos sistemáticos, ou não-diversificáveis.

O CAPM e a APT divergem quanto à forma de medição do risco de mercado; o primeiro entende que este risco está contido na carteira de mercado, enquanto o APT prevê múltiplas fontes de riscos associadas a diversos fundamentos econômicos. O APT supõe que o retorno de determinado investimento é função de uma série de fatores setoriais ou macroeconômicos. Isto indica que, existindo correlação perfeita positiva entre os retornos de dois títulos, os retornos de ambos são influenciados pelos mesmos fatores.

O CAPM pressupõe que há correlação entre os investimentos, mas não especifica os fatores causadores da correlação; já a APT tem o mérito de, ao medir o retorno a ser exigido, tendo em conta o risco do investimento, tentar explicá-lo.

A equação representativa do APT é a que se segue:

$$R_i = \bar{R} + \beta_1 F_1 + \beta_2 F_2 + \dots + \beta_k F_k + \varepsilon$$

Onde:

R_i = retorno a ser exigido em investimento de risco;

\bar{R} = parcela esperada do retorno;

$\beta(F_{ks})$ = parcelas explicativas do risco sistemático;

ε = parcela inesperada do risco específico.

Pelo APT, entendemos que o retorno a ser exigido em determinado investimento é o retorno esperado adicionado ao retorno inesperado. A parcela inesperada é o risco do investimento.

Dividiremos o risco inesperado em duas partes:

- 1) O risco sistemático, aquele que afeta a universalidade dos ativos. Representado por incertezas relativas a condições econômicas, tais como a evolução do PIB, da inflação, da taxa de câmbio, entre as diversas moedas e da taxa de juros interna.
- 2) O risco específico ou não-sistemático, aquele que afeta especificamente um ativo.

É evidente que a divisão do risco inesperado entre sistemático e específico é bastante dedutiva, já que se aceita que a notícia mais específica sobre determinada empresa exerce efeitos sobre o resto da economia. Contudo, a divisão contribui para organizarmos o raciocínio e passarmos, assim, a ter um referencial teórico que permita quantificarmos o retorno a ser exigido em determinado investimento de risco.

O lado direito da equação acima, portanto, é composto por uma primeira parte representativa do retorno esperado; a seguir, por parcelas intermediárias representativas do risco inesperado sistemático – a quantidade destas parcelas é função da quantidade de fatores que estão sendo considerados para a avaliação do retorno a ser exigido no investimento; e, finalmente, pela parcela do risco inesperado específico.

As parcelas intermediárias são compostas por fatores que explicam o risco sistemático total: cada fator explica uma parcela do risco total. O coeficiente beta explica a relação da taxa de retorno do investimento com o retorno de cada um dos fatores que compõem o risco sistemático. Cada fator representa um risco que não pode ser eliminado via diversificação; portanto, teremos um coeficiente beta que mede a relação entre o retorno do investimento e a variação da inflação, e teremos outro coeficiente beta que medirá a variação do retorno do investimento frente a uma variação da taxa de juros real.

Pode-se simplificar o modelo geral se considerarmos um único fator como parâmetro para o risco inesperado sistemático. Neste caso, a prática tem demonstrado que a utilização de um índice de bolsa, que contém uma carteira subjacente diversificada, portanto, não contendo o risco específico mas, sim, o risco sistemático, substitui os diversos fatores do APT, constituindo-se em um único fator que entendemos ser a resultante de vetores (fatores) diversos. Neste caso, o modelo de fator único resume-se a:

$$R_i = \bar{R} + \beta (R_{\text{índice}} - \bar{R}_{\text{índice}}) + \varepsilon, \text{ onde } :$$

R_i = retorno a ser exigido em investimento de risco;

\bar{R} = parcela esperada do retorno;

$\beta(R_{\text{índice}} - \bar{R}_{\text{índice}})$ = parcela inesperada do risco sistemático, a diferença entre o retorno inesperado e o retorno esperado do índice;

ε = Parcela inesperada do risco específico.

A aplicação deste modelo para avaliar o retorno a ser exigido em um investimento, em uma carteira diversificada de ativos, faz com que o modelo fique resumido ao descrito abaixo, já que os riscos não-sistemáticos, ou específicos de cada ativo que integra a carteira, como são independentes um do outro, anulam-se. Assim, entende-se que a média ponderada dos riscos não-sistemáticos dos ativos que compõem a carteira tende a zero à medida em que o número de títulos numa carteira tende a infinito.⁵

Assim temos:

$$R = \bar{R} + \beta \left(R_{\text{índice}} - \bar{R}_{\text{índice}} \right)$$

No modelo APT de um único fator, o coeficiente beta mede a sensibilidade do título a este único fator. No CAPM, o beta também mede a sensibilidade do ativo relativamente a um único fator que é a carteira de mercado. Se esta carteira de mercado está plenamente diversificada, ou seja, só contém o risco sistemático, havendo anulado por completo o risco específico, o retorno esperado desta carteira é o do próprio fator único, que podemos considerar como sendo a taxa de juros livre de risco.

Pode-se então escrever a equação acima da forma que se segue, que comporá o retorno a ser exigido sobre o ativo como a soma dos retornos esperados, e do retorno inesperado associado ao risco sistemático.

$$\bar{R} = R_F + \beta \left(\bar{R}_M - R_F \right)$$

⁵ A diversificação tem um limite lógico, já que o número de ativos que compõem a carteira a oneram em termos de custo de transação e de obtenção de informações. Testes empíricos mostram que carteiras compostas por 25 ativos estão muito próximas da redução máxima do risco específico.

Numa versão multifatorial da APT, pode-se escrever a equação acima da forma que se segue:

$$\bar{R} = R_F + \beta_1 \left(\bar{R}_1 - R_F \right) + \beta_2 \left(\bar{R}_2 - R_F \right) + \beta_3 \left(\bar{R}_3 - R_F \right) + \dots + \beta_k \left(\bar{R}_k - R_F \right)$$

Podemos concluir que a correlação dos retornos de um ativo com os da carteira de mercado é representada por um coeficiente beta. Este coeficiente beta, na realidade, é o beta resultante dos diversos coeficientes beta associados aos respectivos fatores que explicam o retorno do investimento no modelo multifatorial. Isto é sempre verdade quando a carteira de mercado contiver um grau de diversificação que permita a eliminação completa do risco específico, representando somente o risco sistemático de mercado.

O modelo APT precifica os ativos tendo por base fatores setoriais e macroeconômicos. É estabelecida uma relação entre os coeficientes beta (que quantificam o risco), os fatores selecionados (que explicam o risco sistemático) e o retorno justo a ser exigido no ativo sendo avaliado para investimento. Os coeficientes beta estarão estabelecendo uma relação entre o retorno a ser exigido sobre o investimento no ativo e os fatores que explicam o retorno sobre o ativo.

O modelo CAPM é um caso particular do modelo APT; da mesma forma estabelece o retorno a ser exigido do ativo, correlacionando um único fator (representativo do risco) com o coeficiente beta, que relaciona os retornos do ativo, sendo avaliado, com os retornos deste único fator. O CAPM mensura o risco de forma relativa e uniforme. A APT explica o retorno e risco de forma específica para cada ativo.

A APT necessita que haja uma correta seleção dos fatores que explicam a formação do preço do ativo e que estes fatores no tempo continuem a ser aqueles que explicam o preço do ativo. Necessita, também, que se mantenha a relação entre os retornos do ativo sendo avaliado e os retornos dos fatores selecionados, representados pelos diversos coeficientes beta no APT, um para cada fator.

Podemos concluir esta análise, por conveniência, analisando a forma como o APT relaciona o retorno inesperado com o risco, no modelo multifatorial APT, que é uma forma de visualizarmos matematicamente os comentários sobre a forma como o APT relaciona retorno e risco.

$$\bar{R} - R_F = \beta_1 \left(\bar{R}_1 - R_F \right) + \beta_2 \left(\bar{R}_2 - R_F \right) + \beta_3 \left(\bar{R}_3 - R_F \right) + \dots + \beta_k \left(\bar{R}_k - R_F \right)$$

1.4 A relação entre risco e valor

A determinação do valor de um ativo, em se utilizando dos modelos CAPM ou APT, ainda requer a projeção dos fluxos de caixa futuros a serem gerados por este ativo, de modo que, ao se descontar estes fluxos projetados pela taxa de retorno determinada pelos modelos CAPM ou APT, estabelecida em função do grau de risco deste investimento, possamos determinar o valor atual deste investimento.

Estabelece-se, desta forma, uma relação inversa entre risco e valor. A volatilidade dos fluxos de caixa (retornos) determinará o grau de risco do investimento, e este grau de risco, por sua vez, determinará o retorno a ser exigido pelo investimento. Esta taxa de retorno ou taxa mínima de atratividade do investimento, que descontará os fluxos de caixa futuros projetados, determinará o valor do ativo, ou do investimento.

Portanto, o valor do ativo é função:

- da seleção dos fatores que determinam o retorno do ativo;
- da estabilidade da relação destes fatores com o retorno do ativo;
- do grau de intensidade da relação do retorno do ativo com o retorno dos fatores, determinantes do risco inesperado sistemático;
- da qualidade da projeção dos fluxos futuros do ativo a serem descontados por taxa de juros, que representa o custo de oportunidade associado ao grau de risco.

A gestão do risco sistemático que consiga reduzir a variância dos retornos associados aos fatores que explicam o retorno do empreendimento, sem que haja uma alteração do retorno esperado do investimento, proporciona uma redução do retorno mínimo exigido, ou da taxa mínima de atratividade do investimento.

Em outras palavras, estaremos reduzindo o retorno exigido pela sua parcela referente ao risco inesperado sistemático, já que o esperado se manterá e o específico foi eliminado pela diversificação dos ativos.

1.5 Modelo de precificação de opções

O OPM (**Option Pricing Model**) é outro modelo que parametriza a relação entre risco e valor, apresentando uma abordagem diferente da realizada pelos modelos CAPM e APT.

Os modelos CAPM e APT relacionam risco e valor quando combinados com o modelo de Fluxo de Caixa Descontado (FCD). Por exemplo, o modelo CAPM informa o retorno mínimo a ser exigido pelo investimento com determinado nível de risco. Para apurarmos o valor máximo do investimento é necessário que descontemos seus fluxos de caixa projetados à taxa fornecida pelo CAPM ou pelo APT.

Nos empreendimentos com fluxos de caixa negativos ou nulos não podemos avaliá-los pela combinação dos modelos CAPM ou APT com o de FCD, por motivos óbvios. Podemos até calcular os retornos mínimos exigidos para o nível de risco do empreendimento; no entanto, a referida natureza dos fluxos de caixa impede o cálculo do valor do empreendimento, já que o desconto de fluxos de caixa nulos ou negativos gera um valor presente nulo ou negativo.

DAMODARAN (*Op.cit.*) afirma que os modelos CAPM e APT são aconselháveis para a análise de investimentos, cujas taxas de crescimento se aproximam da taxa de crescimento da economia.

Entendemos que o OPM é útil para analisar situações de comparação entre ativos e passivos, nas quais se considera a probabilidade de aumento do valor dos ativos. Podemos entender que o valor do prêmio da opção de compra é o valor da diferença projetada entre ativos e passivos em data futura.

Nos casos em que lidamos com situações extremas, nas quais o empreendimento está em fase pré-falimentar ou em fase de extrema expansão, o valor a ser atribuído ao empreendimento, tendo em vista o seu grau de risco, ganha uma componente probabilística que está presente no OPM, como veremos a seguir.

O OPM, que parametriza diretamente risco e valor, será útil nas circunstâncias em que outros modelos não permitem avaliações, como no caso citado acima. É um modelo desenvolvido por Black e Scholes, em 1973, que tem demonstrado ser muito versátil pois, além de precificar opções sobre ativos negociados em mercados organizados – sua utilização mais comum, tem sido utilizado para outros propósitos como, por exemplo, para avaliação de empresas e de riscos de crédito.⁶

1.5.1 Características do mecanismo opções

Há dois tipos básicos de opções. Uma opção de compra (*call*) e uma opção de venda (*put*). A opção de compra proporciona ao seu titular o direito de comprar um ativo, em determinada data (se opção do tipo européia), ou até determinada data (se for do tipo americana), por um preço preestabelecido, chamado preço de exercício.

A opção de venda dá ao seu titular o direito de vender um ativo, em determinada data (se opção do tipo européia), ou até determinada data (se for do tipo americana), por um preço preestabelecido, chamado preço de exercício.

Antes do detalhamento do modelo citado acima, faremos uma explanação do mecanismo das opções e das variáveis que determinam seu valor, ou seja, das variáveis que formam o preço de uma opção de compra, chamado de prêmio (C):

- a) o preço corrente em mercado do ativo-objeto da opção de compra (A);
- b) o preço de exercício da opção de compra – valor pré-fixado de aquisição do ativo-objeto da opção durante a vigência da opção (E);

⁶ BLACK e SCHOLES apud ROSS et alii (1995, p. 461). Autores cujas teorias são largamente difundidas na área, foram citados pelo artigo “The pricing of options and corporate liabilities”. *Journal of political economy*, v.81, maio/junho 1973.

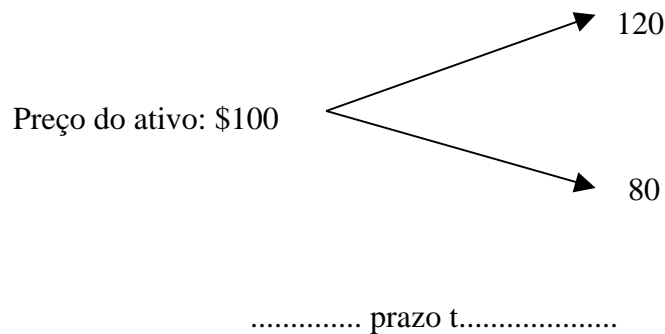
- c) o prazo até o vencimento da opção (t);
- d) a volatilidade dos retornos do ativo-objeto da opção (v);
- e) a taxa de juros livre de risco (r).

Observa-se que as variáveis (A), (t), (v) e (r) são função direta do valor do prêmio, enquanto a variável (E) é função inversa do prêmio da opção de compra.

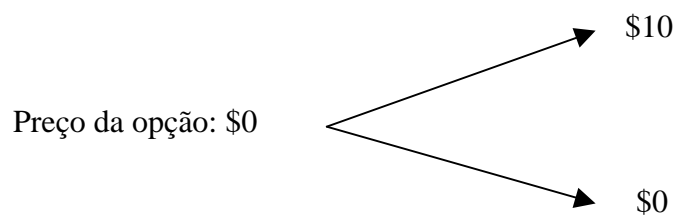
A forma como estas variáveis se inter-relacionam, para formação do prêmio, é bem apresentada utilizando-se as árvores binomiais, que descreveremos a seguir.

1.5.2 Árvores binomiais

Seja um ativo negociado em um mercado qualquer por um preço à vista de 100,00. Aceitemos que, num momento futuro t , este ativo somente possa valer \$120 ou \$80. Um indivíduo tem o interesse de ter o direito de compra deste ativo por \$110. Parece-nos que o investidor acredita que o ativo-objeto desta opção de compra possa ultrapassar o valor de \$110; neste caso, o preço de exercício. Em resumo, teríamos a seguinte situação:



Preço da opção com preço de exercício de \$110:



Neste exemplo simples, há a conjugação de 4 das 5 variáveis que formam o prêmio da opção: o preço à vista ($A = 100,00$); o preço de exercício ($E=110,00$); o prazo t (do momento 0 ao momento t); a volatilidade do ativo-objeto (A) da opção v , aqui representado pela variação única para cima e para baixo do preço do ativo-objeto. Falta ainda avaliarmos a última variável, também inserida nesta análise, que é a taxa de juros livre de risco (r) .

Imaginemos que tenhamos o ativo-objeto ao preço de \$100 e então lançamos a opção de compra do mesmo. Isto significa que assumimos a obrigação de venda do ativo até o término do prazo t da opção (o vencimento da opção). Como temos o ativo-objeto, não corremos qualquer risco; ou seja, se formos exercidos pelo titular, entregaremos o ativo-objeto ao preço de 110,00, tendo um ganho de 10%. Caso não seja exercido pelo titular da opção – hipótese do preço à vista não atingir \$110 até o vencimento da opção –, o lançador terá o ganho equivalente ao valor do prêmio recebido, que será estimado a seguir.

Calcularemos, então, a quantidade Q do ativo-objeto da opção que torna constante o valor da carteira composta pelo ativo-objeto e pela posição vendida em opções.

Se o ativo à vista, como descrito acima, tem o seu preço em 120, portanto, a carteira vale: $120 Q - 10$; 120 é o valor da carteira à vista e \$10 é o custo da opção, já que aceitou-se vender por 110 aquilo que valia 120, nesta hipótese.

Se o preço do ativo à vista estiver em \$80, a carteira vale: $80 Q$; para sabermos o valor de Q que torna o valor da carteira constante, temos:

$$120 Q - 10 = 80 Q, \text{ de onde resulta que } Q = 0,25.$$

Portanto, se tivermos uma carteira composta por 0,25 ativos-objeto da opção de compra, e uma posição vendida na opção de compra esta terá um valor constante, como se verifica abaixo:

$$120 * 0,25 - 10 = 20,00$$

$$80 * 0,25 = 20,00$$

Nesta hipótese simplificada em que a ação só pode assumir dois preços futuros (120 e 80), constatamos que a carteira, independentemente da tendência de alta ou de baixa assumida pelo mercado, tem valor constante de \$20 no momento futuro.

O valor presente desta carteira, já que esta não contém risco, é o seu valor futuro descontado pela taxa de juros livre de risco de 10% praticada em mercado para o período de três meses da opção obtemos um valor presente de \$19,51.

$$VP = 20e^{-0,10*0,25}$$

Como o preço da ação hoje é de 100, a carteira composta por 0,25 ativos vale 25,00. O valor presente da opção de compra, como visto acima, vale 19,51. Então o valor justo do prêmio da opção que não gera oportunidades de arbitragem é de \$25 – \$19,51 = \$5,493.

Reverendo a situação acima através de uma árvore binomial de passo único genérica, teremos a seguinte situação:

Su - o preço quando o ativo está acima do preço S inicial;

Sd - o preço quando o ativo está abaixo do preço S inicial;

Fu - prêmio da opção quando o preço do ativo-objeto atinge Su;

Fd - prêmio da opção quando o preço do ativo-objeto atinge Sd.

Se supusermos uma compra do ativo à vista e uma venda de uma opção de compra sobre este ativo-objeto, teremos que o custo de montagem da carteira será:

$S\Delta - F$, onde S é o preço do ativo-objeto no momento zero; F é o preço da unidade da opção de compra que foi vendida e Δ é a quantidade comprada do ativo-objeto da opção. Portanto, pagamos pelo ativo-objeto e recebemos o prêmio da opção.

Se houver uma alta no preço do ativo-objeto, o valor de nossa carteira, composta pelo ativo e pela posição lançadora em opções no ativo-objeto será:

$$Su\Delta - Fu$$

E, se o preço cair abaixo de S, o valor da carteira será:

$$Sd\Delta - Fd$$

Se igualarmos as expressões acima, teremos o valor de Δ , que tornará a carteira sem risco, como sendo:

$$Su\Delta - Fu = Sd\Delta - Fd$$

Daí teremos que:

$$\Delta = (Fu - Fd) / (Su - Sd) \quad (1)$$

Nesta situação, com ausência de risco, teremos que o valor presente da carteira deve ser seu valor futuro descontado da taxa de juros livre de risco no período. Sendo assim, podemos dizer que:

$$S\Delta - F = (Su\Delta - Fu) e^{-rt} \quad (2)$$

Introduzindo novas variáveis teremos:

u - é o retorno da ação na alta;

d - é o retorno na baixa das cotações;

e^{rt} - é o retorno livre de risco para o período da opção.

Diremos que p é a probabilidade de uma oscilação ascendente do preço da ação e $(1-p)$ a probabilidade de um movimento descendente do preço da ação.

Daí, podemos concluir que:

$$p * u + (1-p) * d = \text{retorno esperado da ação} = e^{rt}$$

$$\text{Chamaremos de } p = (e^{rt} - d) / (u - d) \quad (3)$$

Então, se substituirmos (1) em (2), e simplificarmos a expressão, teremos que:

$$F = e^{-rt} [p * Fu + (1-p) * Fd] \quad (4)$$

As expressões (3) e (4) precificam opções através do modelo binomial de passo único genérico.

Da mesma forma, se considerarmos que p é a probabilidade do preço atingir Su , e que o retorno esperado da ação seja a taxa de juros livre de risco, teremos que:

$$P(Su) + (1-p) (Sd) = r S, \text{ onde } r \text{ é um mais a taxa de juros livre de risco.}$$

Para o propósito de precificar as opções, a composição das posições assumidas acima, com total ausência de risco, ou seja, com retorno esperado certo, sem variância, permite que tenhamos o pressuposto que o retorno esperado seja a taxa livre de risco. Isto tudo devido ao fato de compormos uma posição à vista com uma posição de hedge, que elimina o seu risco.

BOOKSTABER (1950) faz a mesma análise da formação do preço justo de uma opção, que pode ser resumida nesta análise inicial, através do quadro 1:

Posições	Valor	Valor das posições ao preço à vista de 95	Valor das posições ao preço à vista de 110
Venda de 300 opções ao prêmio de \$8 e preço de exercício de \$100,00	+ 2 400	ZERO	- 3 000
Compra de 200 ações a \$100,00	- 20 000	19 000	22 000
Empréstimo a juros de 5% ao ano	17 600	18 480	18 480
Resultado	ZERO	\$520	\$520

Quadro 1 – Análise A da formação de preço justo de uma opção

Como se pode constatar no quadro 1, acima, o prêmio da opção a \$8 gera um ganho de arbitragem, independentemente da tendência assumida pelo preço à vista. Podemos então concluir que este prêmio da opção não é justo, pois criaria uma situação de que operações sucessivas gerariam ganhos infinitos.

Qual seria então o preço da opção que eliminaria os ganhos de arbitragem? Podemos ver no quadro 2, abaixo:

Posições	Valor	Valor das posições ao preço à vista de 95	Valor das posições ao preço à vista de 110
Venda de 300 opções ao prêmio de 6,35 e preço de exercício de 100,00	+ 1 905	ZERO	- 3 000
Compra de 200 ações a 100,00	- 20 000	+ 19 000	+ 22 000
Empréstimo a juros de 5% ao ano	+18 095	- 19 000	- 19 000
Resultado	ZERO	ZERO	ZERO

Quadro 2 – Análise B da formação de preço justo de uma opção

Nestes exemplos, verificamos que os prêmios praticados em mercado são justos pois, do contrário, permitiriam operações de arbitragem.

Estes exemplos simplificados cumprem sua função de apresentar a forma como se interrelacionam as variáveis que formam o valor da opção.

O modelo de Black e Scholes dá um tratamento contínuo ao tratamento discreto assumido pelo modelo binomial. Portanto, este modelo é uma extensão do modelo binomial para períodos de tempo muito curtos.

1.5.3 O modelo de Black e Scholes

O modelo de Black e Scholes, a seguir descrito, trata de dar valor à opção de compra, considerando relações não-lineares entre o valor da opção de compra e o valor do ativo-objeto da opção.

$$C = A * N(d1) - E * e^{-rt} * N(d2)$$

$$d1 = \frac{\ln(A/E) + \left(r + \frac{v^2}{2}\right) * t}{v \sqrt{t}}$$

$$d2 = \frac{\ln(A/E) + \left(r - \frac{v^2}{2}\right) * t}{v \sqrt{t}} = d1 - v \sqrt{t}$$

As variáveis do modelo foram explicadas no item 1.5.1, quando da abordagem do mecanismo opções. A função $N(x)$ é a função de probabilidade acumulada de uma variável normal padronizada. É a probabilidade de que uma variável com distribuição normal padrão, $\Phi(0,1)$, seja menor que x .

O modelo baseia-se em alguns pressupostos, que se seguem:

- 1) O comportamento do preço da ação corresponde ao modelo lognormal, com μ e σ constantes.
- 2) Não há custos de transação nem impostos. Todos os títulos são perfeitamente divisíveis.
- 3) O título não receberá dividendos durante a vida da opção.
- 4) Não há oportunidade de arbitragem sem risco.
- 5) A negociação com títulos é contínua.
- 6) Os investidores podem captar ou emprestar à mesma taxa de juro livre de risco.
- 7) A taxa de juro livre de risco de curto prazo é constante.

Desde que o modelo de Black e Scholes foi publicado, em 1973, muitos esforços foram feitos no sentido de se versatilizar o modelo pelo aumento da abrangência dos casos possíveis de serem tratados pela teoria das opções. Isto levou à flexibilização de pressupostos; por exemplo, outros modelos já têm em consideração a dinâmica e a estrutura a termo das taxas de juros, ao invés de considerar constante a taxa de juros ao longo da vida da opção. Para generalizar a assunção que a volatilidade é constante, outros modelos já levam em consideração a variação da volatilidade. Outros modelos ainda consideram outras distribuições de probabilidade que não a lognormal adotada pelo modelo de Black e Scholes.

O modelo determina o prêmio justo da opção de compra do tipo européia, considerando as mesmas variáveis analisadas nos exemplos anteriores, a saber: preço corrente à vista do ativo-objeto (A); preço de exercício (E); taxa de juros livre de risco (r); prazo até o vencimento da opção (t); e volatilidade do ativo-objeto da opção (v).

A suposição que fundamenta o modelo de Black e Scholes é de que os preços da ação seguem um movimento aleatório e as mudanças proporcionais, nos preços da ação, num curto período de tempo, são normalmente distribuídas. Isso, por sua vez, implica que os preços da ação, a qualquer tempo no futuro, têm distribuição lognormal.

Uma variável com distribuição lognormal tem a propriedade de seu logaritmo natural ser normalmente distribuído. Portanto, a suposição lognormal para os preços do ativo implica que o logaritmo do preço futuro (S_t) tenha uma distribuição normal.

A média e o desvio-padrão de $\ln S_t$ podem ser mostrados como:

$$\ln S + \left[\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right] T$$

e

$$\sigma \sqrt{T}$$

Onde:

S - é o preço atual da ação;

μ - é o retorno esperado ao ano de um investimento no ativo;

σ - é a volatilidade ao ano do preço da ação.

A suposição lognormal descreve o comportamento do preço de uma ação considerando o retorno esperado da ação, μ , e a volatilidade do preço da ação, σ . Observamos que temos uma distribuição normal com média μ e o desvio-padrão σ :

$$\ln S_T \approx \phi \left[\ln S + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T, \sigma \sqrt{T} \right]$$

O valor esperado do preço futuro S_t , $E(S_t)$, é dado por:

$$E(S_T) = S e^{\mu T}$$

Onde:

S - é o preço atual do ativo;

μ - é a taxa de retorno sem risco esperada para o período da opção.

Podemos afirmar ainda que:

$$\ln \frac{S_T}{S} \approx \phi \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T, \sigma \sqrt{T} \right]$$

Dando seqüência ao entendimento do OPM e considerando um ativo-objeto hipotético com volatilidade nula, neste caso teremos os valores de d_1 e d_2 tendendo a infinito e os de $N(d_1)$ e $N(d_2)$ tendendo a 1,00. No caso de volatilidade nula, poderíamos resumir o modelo para a seguinte expressão:

$$C = A - E * e^{-rt}$$

Este modelo considera situações sem risco, pois a volatilidade do ativo-objeto da opção de compra é zero. Não há incertezas quanto ao retorno futuro do investimento.

A fórmula acima não incorpora o prêmio de risco pois o ativo-objeto da opção tem volatilidade nula. No entanto, o modelo preserva o valor intrínseco da opção – a diferença entre o preço à vista e o preço de exercício, e o custo de oportunidade sobre o preço de exercício a que incorre o lançador coberto da opção, duas das três componentes do prêmio, excluindo apenas a parcela referente ao prêmio de risco.

Seria um bom modelo para estabelecer prêmios de opções *in-the-money* e *at-the-money*⁷ para ativos com volatilidade dos retornos nula. Não é útil para o cálculo do prêmio das séries *out-of-the-money*, já que o prêmio destas não contém valor intrínseco, nem custo de oportunidade. No caso das séries *out-of-the-money*, o valor do prêmio de risco é exatamente o valor do prêmio, que neste caso só incorpora o prêmio de risco, sendo então:

$$C = A * N(d_1) - E * e^{-rt} * N(d_2)$$

Podemos concluir quanto ao valor do prêmio de risco estabelecido no modelo de Black e Scholes, para as séries *in-the-money* e *at-the-money*, como sendo a diferença entre a equação geral do modelo:

$$C = A * N(d_1) - E * e^{-rt} * N(d_2)$$

⁷ Chama-se: *in-the-money*, séries de opções em que o preço de exercício é inferior ao preço à vista; *At-the-money*, quando o preço de exercício é igual ao preço à vista; *out-of-the-money*, quando o preço de exercício é superior ao preço à vista.

E a equação, sem considerar o prêmio de risco:

$$C = A - E * e^{-rt}$$

Que resulta na seguinte expressão:

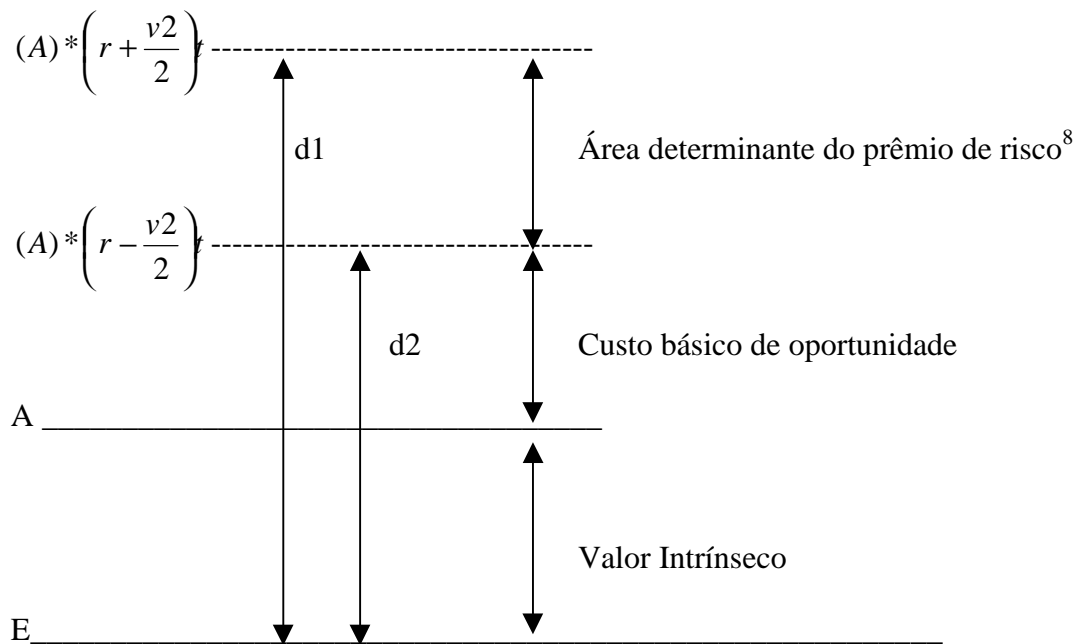
$$A * [N(d_1) - 1] - E e^{-rt} [N(d_2) - 1]$$

Cabe observar que:

- o prêmio de risco está relacionado à probabilidade de exercício e ao preço de exercício nas séries *out-of-the-money*, e associado à probabilidade de não-exercício nas séries *in-the-money*;
- a diferença entre d1 e d2 é de: $d_1 - (d_1 - v\sqrt{t}) = v\sqrt{t}$;
- d2 representa a quantidade de desvios-padrão, que determina a área sob a curva normal que informará da probabilidade de haver exercício – N(d2);
- d1 representa, como vimos acima, um desvio-padrão a mais do que d2, determinando uma área maior do que a determinada por d2, considerando a curva normal padronizada, de N(d1);
- $[N(d_2) - 1]$ representa a probabilidade de não haver exercício;
- $[N(d_1) - 1]$ representa a probabilidade acima reduzida da área de um desvio-padrão.

Apresentamos a seguir, para cada situação – *in-the-money*, *at-the-money* e *out-of-the-money* – um esquema que contém, graficamente, os valores das três componentes do prêmio da opção, o valor intrínseco, o custo de oportunidade e o prêmio de risco, para cada caso.

Quanto à série *in-the-money*, com preço à vista maior do que o preço de exercício, no momento da aquisição da opção, temos:



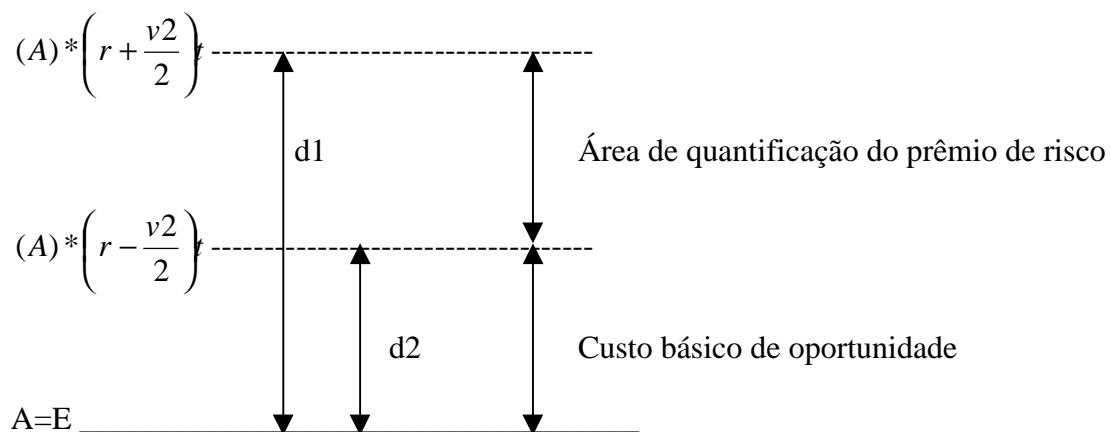
O valor de $N(d_2)$ informa a probabilidade de haver exercício. É representada pela área sob a curva normal até d_2 . $N(d_2)$ é função de d_2 , que por sua vez é representado por uma primeira parcela, do valor intrínseco, positiva, e a esta ainda se acrescenta o retorno esperado do ativo sobre o preço. Este intervalo, assim definido, acaba por determinar o intervalo onde ocorre o exercício. Ao dividirmos por $v\sqrt{t}$ o denominador da expressão de d_2 , estaremos simplesmente padronizando a quantidade de desvios, e informando a quantidade de desvios-padrão que representa a área sobre a curva normal que determina a probabilidade de haver exercício.

O prêmio de risco desta série é determinado pela área compreendida entre $N(d_1)$ e $N(d_2)$, ou $N(d_1)$ mais um desvio-padrão, ponderados respectivamente pelo preço à vista e preço de exercício.

⁸ d_1 e d_2 estão inseridos no gráfico acima para facilitar a intuição sobre o cálculo da área da normal, cuja probabilidade determinará o prêmio de risco.

Quanto mais *in-the-money* for a série, menor será o valor do preço de exercício relativamente ao preço à vista, menor sendo também o prêmio de risco incorporado no prêmio da opção. O prêmio de risco seria tanto menor, quanto maior fosse a relação $\ln(A/E)$, o que faria com que $d1$ e $d2$ assumissem valores elevados, e a diferença de um desvio-padrão entre $d1$ e $d2$ representasse pequena área sob a curva normal, significando pequena probabilidade de frustração da expectativa do lançador de ser exercido.

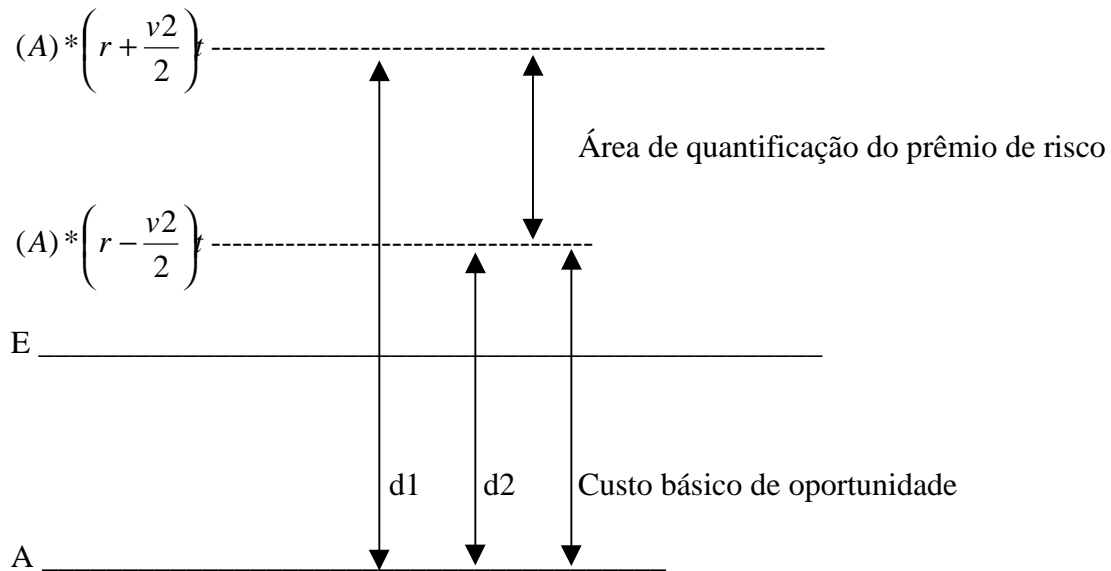
Situação análoga encontramos nas séries *at-the-money*, cujo valor intrínseco é zero, como vemos no esquema abaixo:



Tanto nas séries *in-the-money* como nas *at-the-money* o prêmio de risco é proporcional à diferença, entre o valor futuro de A no vencimento, incrementado de seu retorno esperado, e o preço de exercício. Esta diferença é posta em termos de retorno e processada pela equação de $d2$, que transforma este retorno em quantidade de desvios-padrão padronizados, que serão usados para quantificar o prêmio de risco.

No caso das séries *out-of-the-money*, temos:

Diferença entre E e A



No caso das séries *out-of-the-money*, o lançador corre o risco de ser exercido. Ao se obrigar a vender o ativo a preço de exercício, superior ao de mercado corrigido pelo retorno esperado, o lançador corre o risco de obter um retorno abaixo do propiciado pelo mercado para o ativo-objeto.

Quanto mais *out-of-the-money* for a série, menor é o preço à vista relativamente ao preço de exercício. Nestes casos o nível de volatilidade do ativo-objeto da opção será importante para aumentar ou diminuir as probabilidades de exercício.

O prêmio de risco, neste caso, é proporcional à probabilidade do lançador ser exercido. Quanto mais *out-of-the-money* a série, menor o prêmio de risco para um mesmo nível de volatilidade.

O prêmio de risco do lançador será função da probabilidade da expectativa do lançador da opção de compra ser frustrada. Isto significa a probabilidade do lançador não ser exercido numa série *in-the-money* e a probabilidade de ser exercido numa série *out-of-the-money*. Ambas estas probabilidades são pequenas. Nas séries *at-the-money* é que ocorre o maior risco de se ter a expectativa frustrada. É o preço à vista de maior risco; uma pequena alteração deste pode determinar o exercício ou o não-exercício.

Para ilustrarmos o valor atribuído pelo modelo de Black e Scholes ao prêmio de risco, o gráfico abaixo (figura 1) apresenta, para uma série com preço de exercício de 100, o valor do preço à vista vigente em mercado a cada momento no eixo das abscissas e o valor do prêmio de risco no eixo das ordenadas.

Repare que quando o preço à vista é igual a 100, estamos perante uma série *at-the-money*; quanto mais abaixo do preço de 100, estamos analisando uma série ainda mais *out-of-the-money*; e, quanto mais acima de 100, uma série *in-the-money*.

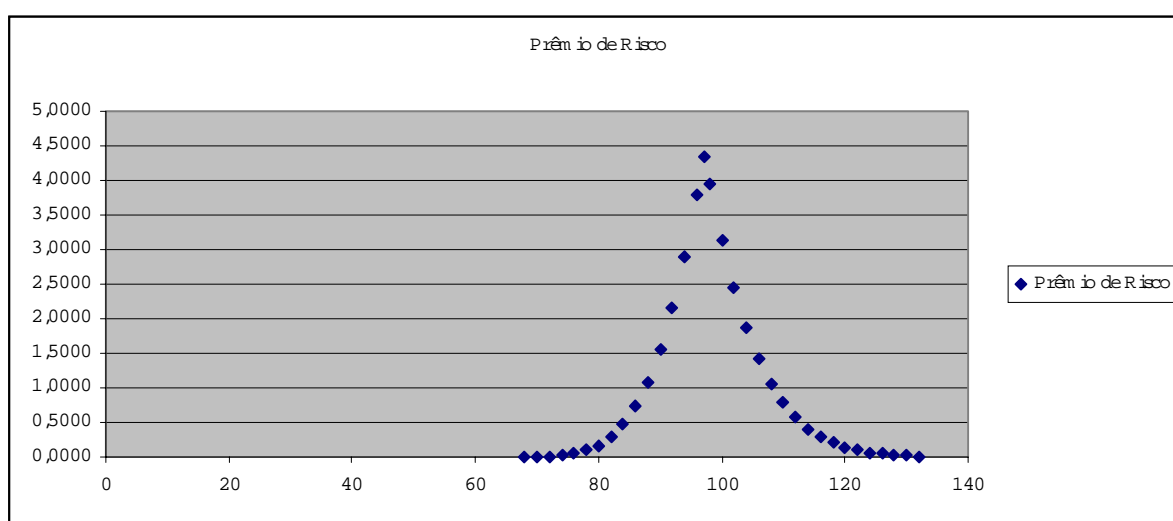


Figura 1 – Valor do preço à vista x valor do prêmio de risco

1.6 Conclusões

O valor do ativo é função do grau de risco associado ao investimento no ativo.

Cada modelo tem sua forma de medir o risco e parametrizar a relação risco e valor. Em todos os casos, a volatilidade dos retornos ou dos fluxos de caixa futuros são determinadoras do grau de risco. A forma de medição desta volatilidade é que se altera segundo o modelo: no CAPM, o grau de risco é função do coeficiente beta relacionado ao retorno de mercado; na APT, é função dos diversos coeficientes beta correlacionados ao diversos fatores explicativos do retorno; e, no OPM, o grau de risco é calculado somente em função do valor da variância dos retornos propiciados pelo ativo.

A avaliação de ativos feita pela combinação do modelo CAPM ou APT com o modelo dos Fluxos de Caixa Descontados estabelece uma relação inversa entre risco e valor, como vimos.

A quantificação do risco é feita nos modelos CAPM e APT, através do cálculo do coeficiente beta, relacionando-o ao fator único ou a diversos fatores. O prêmio de risco, nestes casos, está inserido na ponderação do coeficiente beta com o prêmio de risco de mercado. A quantificação do prêmio de risco, nestes casos, depende de se estabelecer uma relação entre o retorno do ativo e diversos fatores e da manutenção da relação estabelecida.

O modelo OPM estabelece, de forma direta, a relação entre risco e valor. O prêmio de risco do OPM está relacionado à probabilidade do valor do ativo (preço à vista) ultrapassar o valor do passivo (preço de exercício). Esta probabilidade é atribuída tendo por base a distribuição normal e a volatilidade do ativo-objeto da opção de compra.

O OPM é válido em situações em que diferenças significativas projetadas entre ativos e passivos, função da volatilidade dos retornos do ativo-objeto (ativos) da opção, serão fundamentais na determinação do valor da opção, do prêmio ou da diferença entre ativo e passivo. Conforme a relação inicial entre ativos e passivos, bem enquadradas na análise dos tipos de séries, teremos diversas combinações entre prêmios de risco e valor dos ativos.

Podemos nos deparar, nestes casos, com situações em que o aumento da volatilidade dos retornos signifique aumento do valor do empreendimento. Na prática, constatamos que o valor do prêmio de risco embutido no prêmio da opção varia de forma não-linear com o aumento da volatilidade do ativo-objeto em cada tipo de série.

Numa comparação com o modelo de FCD, o preço de exercício se equipara ao valor esperado dos fluxos de caixa negativos (passivo) em determinada data no futuro. Quando o valor presente líquido (ativo menos passivo) é negativo estamos perante uma situação *out-of-the-money*. Quando é positivo, perante uma situação *in-the-money*, ou seja, há valor intrínseco; e, quando nulo, uma situação *at-the-money*. O valor do prêmio representa o valor esperado da diferença entre ativo e passivo, tendo em conta o nível de volatilidade.

Na relação entre risco e valor, em situações de fluxos de caixa negativos, ou de empreendimentos que tem uma elevadíssima taxa de retorno esperada, o modelo OPM é mais adequado para a análise do valor. Nestes casos, se consegue estabelecer o valor do direito contingencial, através de métodos probabilísticos, como visto anteriormente.

Estes aspectos servem para enfatizar que o OPM é baseado em muito menos pressupostos que os modelos de equilíbrio, como o CAPM e o APT. Uma opção é apenas um direito contingencial sobre um ativo com risco. Uma vez observado o valor de equilíbrio do ativo, sabemos que o valor da opção deve mover-se de acordo com ele.

A atratividade do modelo OPM reside no fato de que quatro das suas cinco variáveis são observáveis: o preço da ação (A); o preço de exercício (E); a taxa de juros (r); e o prazo para o vencimento da opção (t). Somente um dos parâmetros precisa ser estimado: a variância da taxa de retorno do ativo, ou o risco do investimento.

Cabe aqui destacar que o OPM é capaz de avaliar um ativo qualquer sem estabelecer relações dos retornos deste ativo com os retornos de outros fatores. Se não conseguirmos selecionar fatores adequados que expliquem o preço de um ativo, e ainda, se conseguir estabelecê-los, mas não suas correlações com o ativo que pretendemos avaliar, não obteremos sucesso na avaliação pelos modelos APT e CAPM. No entanto, com os dados coletados do próprio ativo, pelo modelo OPM chegaremos a um valor para o ativo.

Finalizando este capítulo, apresentamos algumas informações complementares sobre aspectos do OPM como determinante do valor.

Uma primeira visão foi desenvolvida por PERERA (1997), em seu artigo "Quantificação e Precificação de Risco de Crédito através do Modelo de Opções".

Segundo o autor, o preço da opção não depende do conhecimento da probabilidade de um movimento de subida do preço do ativo. Informações sobre as expectativas de mercado com relação aos futuros movimentos de preços já foram capturadas pelo preço atual do ativo. Conseqüentemente, mesmo que os investidores tenham expectativas divergentes sobre os preços futuros das ações, eles ainda concordarão com o valor da opção de compra relativo a seus parâmetros atuais.

As atitudes individuais em relação ao risco são irrelevantes na derivação da fórmula de precificação da opção de compra. A única necessidade é que as pessoas prefiram mais a menos riqueza; dessa forma, os lucros extraordinários decorrentes de arbitragens são eliminados.

A única variável randômica da qual depende o valor da opção de compra é o preço da ação. O preço da opção de compra não depende, por exemplo, do portfólio de mercado de todos os ativos.

Uma segunda visão do OPM para avaliar ativos é a desenvolvida por DAMODARAN (1997), em seu livro "Avaliação de Investimentos", que apresenta alguns aspectos relevantes descritos a seguir.

Como vimos anteriormente, a teoria de precificação de opções, como apresentada nos modelos binomial e de Black e Scholes, pressupõe que seja possível montarmos uma carteira composta pelo ativo à vista e a posição vendida em opções de modo que não haja risco e que seja possível a captação e a cessão de recursos sem risco.

No que tange a ativos negociados em mercados com estruturas para negociação e liquidação das operações, organizados, estas premissas de possibilidade de arbitragem, que sustentam o modelo de opções, são válidas. Entretanto, tais premissas tornam-se menos justificáveis para ativos não negociados em mercados organizados, não se podendo, desta forma, garantir a possibilidade de arbitragem.

Outra premissa do modelo OPM é que há uma formação contínua de preços em mercado, sem saltos (*gaps*) na formação dos mesmos. Este pressuposto só é válido se o ativo que estiver sendo negociado o for em mercado organizado com sistema de negociação em contínuo.

A suposição de que a variância do ativo não se altera durante o prazo de vigência da opção é admissível para os casos de opções de curto prazo. Nos casos de avaliação de empresas em que se terá em consideração a duração dos passivos, não se pode aceitar esta hipótese de variância constante.

Quando se trata de avaliação de empresas e projetos, em seus pressupostos nem sempre é possível admitir-se o exercício imediato da opção, como o modelo OPM admite.